16/01/16

Πρόταση:
Έστω $f: V \to W$ γραμμ. απεικόνιση με $\dim V < \infty$. Τότε
$\dim V - \dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f$

Εξήγηση: Ξεκινάμε στο V με $\dim V$ "βαθμούς ελευθερίας"
Χάνουμε λόγω του $\ker f$ $\dim \ker f$ "βαθμούς ελευθερίας"
Τότε το $\operatorname{Im} f$ έχει $\dim V - \dim \ker f$ "βαθμούς ελευθερίας"
Απόδειξη
Έστω $d_1 = \dim \operatorname{Im} f$, $d_2 = \dim \ker f$, $d_3 = \dim V$
Βήμα 1: Έστω $v_1, v_2 \dots v_{d_1}$ βάση του $\operatorname{Im} f$, $w_1, w_2, \dots w_{d_2}$ βάση του $\ker f$
Βήμα 2: Επιλέγουμε $z_1 \dots z_{d_1} \in V$ ώστε $f(z_i) = v_i$
Βήμα 3: Δείχνουμε $z_1 \dots z_{d_1}, w_1 \dots w_{d_2}$ βάση του V. Άρα $d_3 = d_1 + d_2$

Παράδειγμα: Έστω $f: V \to W$ γραμμική, $\dim V = 5$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$
Βρείτε το $\dim \ker f$
Απάντηση
$\dim V - \dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \ker f = \dim V - \dim \operatorname{Im} = 5 - 2 = 3$

Πόρισμα: Έστω $\dim V = \dim W < \infty$ και $f: V \to W$ γραμμική. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
i) f ισομορφισμός (δλ. f "1-1" και επί)
ii) f "1-1"
iii) f επί
Απόδειξη
Φανερά i) $\Rightarrow$ ii) και i) $\Rightarrow$ iii)
Έχουμε f: 1-1 αν και μόνο αν $\ker f = \{0_V\}$ αν και μόνο αν $\dim \ker f = 0$
f επί αν και μόνο αν $\operatorname{Im} f = W$ αν και μόνο αν

$\dim \operatorname{Im} f = \dim W = \dim V$

Υπόθεση: f 1-1 από (Σ) $\left\{\begin{array}{l}\dim V - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f \\ \dim V = \dim W\end{array}\right. \Rightarrow$

$\dim \operatorname{Im} f = \dim W$
Άρα f επί

Υπόθεση: f επί άρα $\operatorname{Im} f = W$
Από (Σ) $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim W = 0$
Άρα $\operatorname{Ker} f = \{0\} \Rightarrow f$ "1-1"

Πόρισμα: Έστω F σώμα, V, W δ.χ. επί του F με $\dim V < \infty$ και $\dim V = \dim W$
(Υπενθ. V ισόμορφος W σημαίνει ότι υπάρχει ισομορφισμός $f: V \to W$ δηλαδή f γραμμική, 1-1 και επί
Απόδειξη
Υποθ. V, W ισομορφισμός. Τότε υπάρχει $f: V \to W$ ισομορφισμός. Έστω $d = \dim V$ και $v_1, \dots, v_d$ βάση του V. Από προηγούμενη πρόταση τα $f(v_1), f(v_2) \dots f(v_d)$ είναι διαφορετικά ανά δύο και βάση του W. Άρα $\dim W = d = \dim V$
Αντίστροφα, έστω $d = \dim V = \dim W$. Έστω $v_1, v_2 \dots v_d$ βάση του V και $w_1 \dots w_d$ βάση του W. Ορίζουμε $f: V \to W$ ~~και~~ είναι η (μοναδική) γραμμική απεικόνιση με την ιδιότητα $f(v_i) = w_i$. Όπως έχουμε δει, ο τύπος της f είναι ⊕:

$$\oplus\ f\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i w_i$$

Αφού τα $w_1 \dots w_d$ είναι βάση του W από ① έχουμε
i) f 1-1. Πράγματι αν $f(v) = 0_W$, γράφουμε
$v = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i$ άρα $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i = 0 \to \lambda_i = 0$ για κάθε i

αφού $w_1 \dots w_d$ βάση άρα γραμμ. ανεξ.
ii) f Επί. Πράγματι έστω $w \in W$. Αφού $w_1 \dots w_d$ βάση του W υπάρχουν $\lambda_i \in F$ με

$$W = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i w_i = f(v) \text{ για } v = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v.$$

Άρα ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ.

Παράδειγμα
$F \in R$, $V = R^4$, $W_1 = R^{2\times 2}$, $W_2 = R^{1\times 4}$, $W_3 = R_3[x]$
Είναι 4 διανυσματικοί χώροι επί του R. Έχουν όλοι διάσταση 4 (όπως ξέρουμε). Άρα είναι όλοι ισόμορφοι (ανά δύο) από την προηγούμενη πρόταση.
ΕΡΩΤΗΜΑ: Βρείτε $f: W_1 \to W_3$ ισομορφισμό
Βήμα 1ο: Από τα προηγούμενα $V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$V_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $V_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ βάση του W_1

Βήμα 2ο: Από τα προηγούμενα $w_1 = 1$, $w_2 = x$, $w_3 = x^2$, $w_4 = x^3$ βάση του W_3.

Βήμα 3ο: Από τη θεωρία η απεικόνιση $f: W_1 \to W_3$ με $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4$ για $\lambda_i \in R$. Είναι ισομορφισμός.
Ποιος είναι ο τύπος της f;
Εύκολα βλέπουμε ότι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_4 v_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}$
και $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_4 w_4 = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3$

Άρα ο τύπος της f είναι $f\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}\right) =$
$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3$ (Σ2)

Συμβολισμός:
$\dim V < \infty$ σημαίνει ότι ο V έχει πεπερασμένη διάσταση

Πίνακας Γραμμικής Απεικόνισης

Ορισμός: Έστω F σώμα, V, W διαν. χώροι επί του F πεπερασμένης διάστασης.
$e = (e_1, \dots e_\mu)$ βάση του V, $g = (g_1, \dots, g_p)$ βάση του W και $T: V \to W$ γραμμική απεικόνιση (γραμμική απεικόνιση = γραμμικός μετασχηματισμός). Θα ορίσουμε τον πίνακα $[T]_e^g \in F^{p \times \mu}$ ως εξής:
Αφού g βάση του W για $i = 1, 2, \dots \mu$ υπάρχουν μοναδικά $\alpha_{ij} \in F$ με $f(e_i) = \alpha_{1i} g_1 + \alpha_{2i} g_2 + \dots + \alpha_{pi} g_p$
τότε $[T]_e^g = [\alpha_{ij}]_{1 \le i \le \mu} \in F^{p \times \mu}$

Παράδειγμα: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμ. απεικόνιση με
$T((x,y)) = (3x + 2y, 5y, x + y)$. $e = (e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και $g = (g_1 = (1,0,0), g_2 = (0,1,0), g_3 = (0,0,1))$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Θα βρούμε τον $[T]_e^g \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$
Έχουμε $T(e_1) = T((1,0)) = (3,0,1) = 3g_1 + 0g_2 + g_3$

$$[T]_e^g \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$T(e_2) = T((0,1)) = (2,5,1) = 2g_1 + 5g_2 + g_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

Παράδειγμα 2: $T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ με $T(f(x)) = (f(0), f'(0))$ για $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$. Εύκολα βλέπουμε Τ γραμμική. Έστω $e = (e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ και $g = (g_1 = (1,0), g_2 = (0,1))$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$

Γενικώς κανόνας αν $T: V \to W$ $[T]_e^g \in F^{\dim W \times \dim V}$

$T(e_1) = (1,0) = 1 g_1 + 0 \cdot g_2$

$T(e_2) = (0,1) = 0 \cdot g_1 + 1 \cdot g_2$

$T(e_3) = (0,0) = 0 g_1 + 0 g_2$

Άρα $[T]_e^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

Ορισμός: Έστω V διαν. χώρος, $e = (e_1, e_2 \ldots e_n)$ διατ. βάση του V και $v \in V$ με $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots +$ $\lambda_n e_n$ και $\lambda_i \in F$

Θέτουμε $[V]e = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in F^{n\times 1}$ και τον λέμε πίνακα

στήλη των συντεταγμένων του v ως προς την βάση e.

Παράδειγμα: Έστω $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (e_1 = (1,1), e_2 = (1,-1))$ διατεταγμένη βάση του V. Βρείτε το $[(2,0)]_e \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

Λύνουμε το σύστημα (ως προς λ_1, λ_2)

$(2,0) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1)$ και βρίσκουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Συμπέρασμα $[(2,0)]_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Πρόταση: Έστω $T: V \to W$ γραμμική, e διατεταγμένη βάση του V, g διατεταγμένη βάση του W και $v \in V$. Τότε

$$[T(v)]_g = [T]_e^g \cdot [v]_e$$

γινόμενο πινάκων

Απόδειξη

Εύκολη επαλήθευση